Es sei A ein Dedekindring, $K = Quot(A)$, L/K endlich separabel und B der ganze Abschluss von A in L. Weiter gelte Theorem 4.1.7 (2) und Theorem 4.1.7 (3) sei bereits gezeigt, unter der Annahme, dass A ein diskreter Bewertungsring ist. Dann gilt Theorem 4.1.7 (3) auch für einen beliebigen Dedekindring A.

Beweis. Sind $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ Primideale von B, beziehungsweise A, so sind sie maximal. Demnach ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ das einzige Primideal in $A_\mathfrak{p}$ ungleich 0. Außerdem ist $\mathfrak{P}B_\mathfrak{p}$ offensichtlich ein Primideal über $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ in $B_\mathfrak{P}$. Desweiteren vertauscht Lokalisierung mit Vervollständigung (siehe z. B. http://mathoverflow.net/questions/64399/does-completion-commute-with-localization). Also gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_{B/A} \cdot \widehat{B}_\mathfrak{P})_\mathfrak{p} &= (\mathcal{D}_{B/A})_\mathfrak{p} \cdot (\widehat{B}_\mathfrak{P})_\mathfrak{p} \\
&= \mathcal{D}_{B_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}} \cdot (\widehat{B_\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}B_\mathfrak{p}} \\
&= \mathcal{D}_{(\widehat{B_\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}B_\mathfrak{p}}/(\widehat{A_\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}} \\
&= \mathcal{D}_{(\widehat{B}_\mathfrak{P})_\mathfrak{p}/(\widehat{A}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}} \\
&= (\mathcal{D}_{\widehat{B}_\mathfrak{p}/\widehat{A}_\mathfrak{p}})_\mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathcal{D}_{B/A} \cdot \widehat{B}_\mathfrak{P} = \mathcal{D}_{\widehat{B}_\mathfrak{p}/\widehat{A}_\mathfrak{p}}.$$

$\square$