Aplicación del Cálculo Integral para la Solución de Problemáticas Reales

Juan S. Fierro Ramírez[a]
Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Antioquia, 050031

En este artículo se muestra el proceso de solución numérica del ejercicio N°40, página 544, del libro "Cálculo de un variable", con la finalidad de cumplir los requerimientos para el trabajo final de modelación de la asignatura Cálculo Integral. Por medio de la aplicación de integrales, se determinará la ecuación para el cálculo de la longitud de un cable telefónico y se hallrá la altura a la cual debe estar conectado el cable teniendo en cuenta la altura mínima de este respecto al suelo, y la distancia de separación entre ambos postes.

Nomenclatura

x = distancia en el eje horizontal desde el origen hasta el poste

y = altura del poste respecto al eje vertical

c = desplazamiento en y del punto de origen de la función

I. Introducción

El cálculo integral se encarga del estudio de las antiderivadas y las integrales, las cuales son utilizadas para el cálculo de áreas, volúmenes y longitudes de arco. Su aplicación en el área de las ingenierías, comprende un gran número de temáticas, como pueden ser: hallar la magnitud de una carga distribuida sobre una viga, calcular la energía consumida en un periodo de tiempo, conocer el volumen de fluido que pasa por un ducto durante un periodo establecido, entre otras.

Es de gran importancia que un estudiante conozca las diversas aplicaciones de las integrales en

[a] Estudiante, Facultad de Ingeniería Aeronáutica, Cir. 3 # 68C-5

su área de estudio, principalmente siendo esta una ingeniería, con el fin de que pueda aplicarla a la solución de problemáticas de la vida diaria o de la industria.

El artículo expone la solución del comportamiento de un cable telefónico, descrito por una función trigonométrica, mediante el planteamiento de las ecuaciones necesarias para el desarrollo del ejercicio. De igual forma expone, mediante el uso de software, una solución concreta, como se solicita en el apartado a resolver.

II. Planteamiento del Problema

Un cable telefónico que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. Ver Figura 1. El cable toma la forma de una catenaria con ecuación

$$y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{1}$$

1. Halle la longitud del cable.

2. Suponga que dos postes de teléfono están apartados entre sí 50 pies y que la longitud del cable entre dos postes es de 51 pies. Si el punto mínimo del cable debe estar a 20 pies sobre el suelo, ¿a qué altura debe estar atado el cable en cada poste?

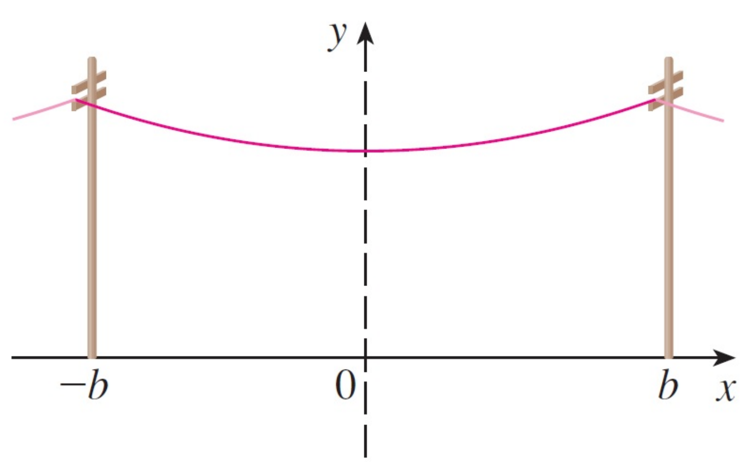

Fig. 1 Esquema del ejercicio N°40, página 544. Tomada de *Cálculo de una variable* [1].

III. Solución Manual del Problema

Al analizar el ejercicio y lo solicitado en el numeral 1, es claro que la solución se obtiene por medio de la aplicación de la integral para longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \tag{2}$$

ya que el numeral 1 solicita que hallemos la longitud del cable.

A. Primera Derivada de la Función

Para continuar con la solución del ejercicio, se procede a hallar la primera derivada de la función (1)

$$f(x) = c + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

De igual forma, se comprueba que el dominio de la nueva función comprende a todos los reales.

B. Simplificación de la Raíz

Con el objetivo de facilitar la solución, se simplifica la raíz que se encuentra dentro de la integral.

$$\sqrt{1 + \left[\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)\right]^2}$$
$$\sqrt{1 + \sinh^2\left(\tfrac{x}{a}\right)}$$
$$\sqrt{\cosh^2\left(\tfrac{x}{a}\right)}$$
$$\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right)$$

C. Limites de Integración

Analizando el planteamiento del ejercicio, se tiene que $-b \leq x \leq b$, por lo cual la función posee un comportamiento simétrico; entonces se asume que la integral puede ser evaluada en el intervalo $0 \leq x \leq b$ y esta debe ser multiplicada a su vez por 2, para obtener la longitud total del cable. Se obtiene entonces la siguiente integral

$$L = 2\int_0^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \tag{3}$$

que será la encargada de proporcionar la longitud final.

D. Solución de la Integral

Se procede a solucionar la integral obtenida anteriormente.

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \\
L &= 2\left[a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]\Big|_0^b \\
L &= 2\left[a\sinh\left(\frac{b}{a}\right) - a\sinh\left(\frac{0}{a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$L = 2\left[a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)\right] \tag{4}$$

La ecuación (4) es la que describe la longitud del cable telefónico, en función del valor que tome b.

E. Numeral 2

La distancia que separa a ambos postes es 50 pies, por lo que la distancia del poste b al origen es 25 pies y la longitud del cable es 51 pies. Con la información anterior, se resuelve la ecuación (4) para obtener el valor de a.

$$
\begin{aligned}
51 &= 2\left[a\sinh\left(\frac{25}{a}\right)\right] \\
0 &= 2\left[a\sinh\left(\frac{25}{a}\right)\right] - 51 \\
a &= 72.3843 \lor a = -72.3843
\end{aligned}
$$

Se selecciona el valor positivo para a, el cual finalmente tendrá un valor de 72.3843.

Ahora, la ecuación que describe la altura (l) es

$$y = c + 72.3843\cosh\left(\frac{x}{72.3843}\right) \tag{5}$$

Debido a que la altura mínima del cable debe ser 20, tenemos que $y(0) = 20$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c + 72.3843\cosh\left(\frac{x}{72.3843}\right)\\
y(0) &= c + 72.3843\cosh\left(\frac{0}{72.3843}\right)\\
&= c + 72.3843\cosh(0)\\
&= c + 72.3843\\
20 &= c + 72.3843\\
c &= 20 - 72.3843\\
c &= -52.3843
\end{aligned}$$

Ya con los valores necesarios para resolver la ecuación que describe la altura (l), se procede a reemplazar valores y obtener la altura a la que se deben encontrar los postes. Recordar que:

$$\begin{aligned}
x &= 25\\
c &= -52.3843\\
a &= 72.3843
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
y &= -52.3843 + 72.3843\cosh\left(\frac{25}{72.3843}\right)\\
y &= 24.3603 \text{ ft}
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que la altura a la que deben encontrarse ambos postes, para cumplir con las condiciones iniciales, debe ser 24.3603 ft.

IV. Solución Mediante Software

Se decide hacer uso de *Excel 2016* y *Wolfram Alpha* para realizar la comprobación del desarrollo manual, debido a que son programas ampliamente utilizados, a que poseen la capacidad de poder graficar funciones, y a la gran facilidad para acceder a ellos, como es el caso de *Excel*, ya que su licencia es provista por la universidad para los estudiantes.

A. Primera Derivada de la Función

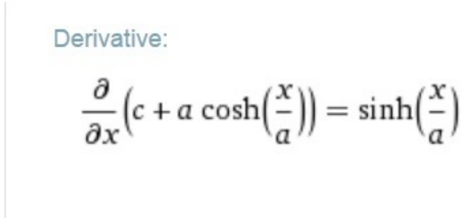

Fig. 2 Primera derivada de la función que describe el cable telefónico. Tomada de *Wolfram Alpha*.

B. Simplificación de la Raíz

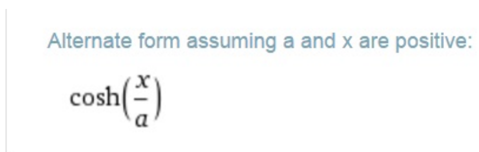

Fig. 3 Simplificación de la raíz. Tomada de *Wolfram Alpha*.

C. Solución de la Integral

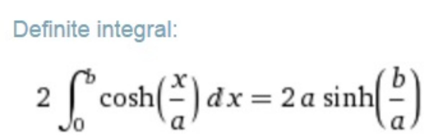

Fig. 4 Solucion de la integral. Tomada de *Wolfram Alpha*.

D. Solución del Numeral 2

Para este caso, se decidió obtener el valor de la variable a mediante *Wolfram Alpha.* Ver Figura 5.

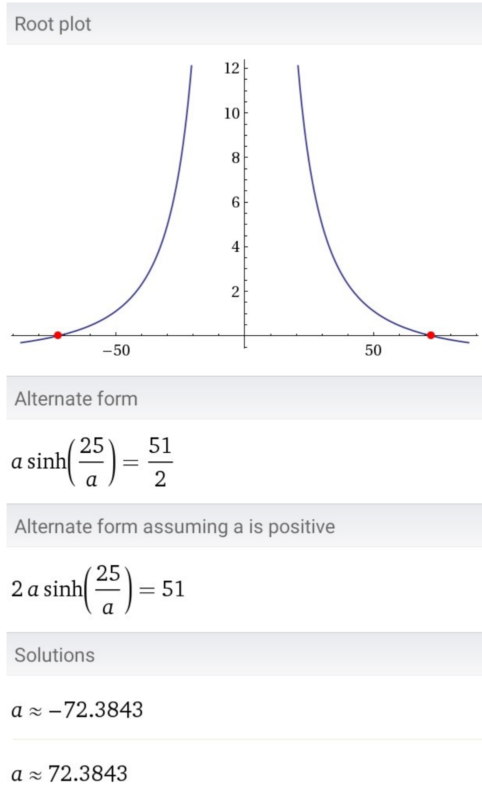

Fig. 5 Obtención del valor de la variable a. Tomada de *Wolfram Alpha*.

A partir de este punto, la solución toma lugar en *Excel*. Se construye una tabla, en la cual se introducen los valores de las diferentes variables, y con el sistema de ecuaciones de *Excel*, se procede a la solución del ejercicio. Se obtiene la gráfica que describe el comportamiento del cable telefónico. Ver Figura 6.

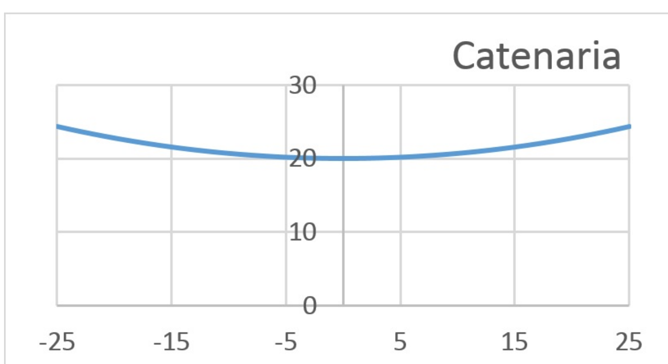

Fig. 6 Representación gráfica de la ecuación que describe el cable telefónico. Tomada de *Excel 2013*.

Finalmente, se observa que el modelo arroja como altura de los postes, el valor correspondiente a 24.3603 ft.

E. Utilidad del Modelo Obtenido en *Excel 2013*

El modelo realizado en *Excel* puede ser ampliamente usado, ya que halla las alturas del cable en diferentes puntos y de igual forma calcula la longitud del cable.

Desafortunadamente, algunos datos deben ser calculados con programas externos, como es el caso de la variable a, la cual hallamos con *Wolfram Alpha*.

V. Conclusiones

La aplicación de integrales en la solución de problemas reales, representa una parte importante de las ingenierías. Permite el cálculo preciso de diferentes elementos, en una amplia variedad de casos.

Al realizar el modelamiento del problema, se comprueban los datos obtenidos de forma manual, y se ratifica la precisión de ambas metodologías para la solución del problema propuesto.

Finalmente, se logra la ampliación de conocimientos en la utilización de software para la solución de problemáticas reales y se observa de primera mano la importancia del Cálculo.

VI. Referencias

[1] James Stewart. *Cálculo de una variable: trascedentes tempranas.* Cengage Learning, 2012.